

Uppgift 1:

En rätvinklig triangel med kateterna 5cm och 12 cm får rotera kring den längre kateten, varvid en kon bildas. Hur stor är volymen på den konen som bildas?

Så här ser alltså vår triangel ut

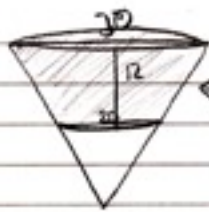
Formeln för att räkna ut en kons volym ser ut så här.

Eftersom vi redan har måtten behöver vi bara sätta in dem i formeln, och så var det klart!

Svar: 314 cm^3

Uppgift 2:

En skål har formen av en stympad kon. Bottendiametern är 20 cm och skålens cirkulära öppning har diametern 30 cm. Skålens höjd är 12 cm. Hur många liter rymmer skålen?

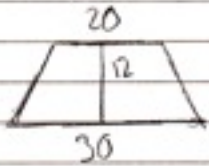


Vår skål med
mått

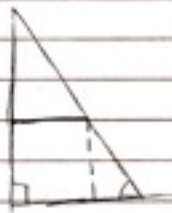
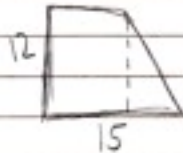
Vad vill vi då veta? Vi måste ta reda på konens höjd för att kunna räkna ut volymen på hela konen och sedan dra av toppen.



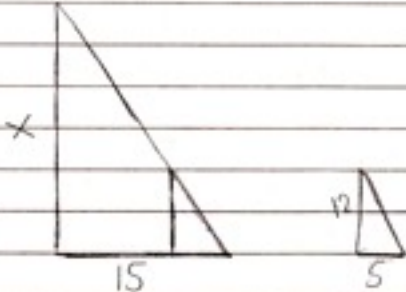
Jag började med att rita upp konen med mått och vända på den. Det blir mycket enklare att se allt då, tycker jag, och det är lättare att se trianglar.



Sedan ritade jag upp skålen från sidan, och sedan en halv skål. Då såg jag en liten rätvinklig triangel, som dessutom var likformig med den stora triangeln som bildade konen.



Båda hade ett hörn som var 90° och de delade en vinkel. Den sista vinkeln måste alltså vara lika stor, vilket gör trianglarna likformiga. Detta kan man använda nu för att räkna ut längden.



$$\frac{5}{12} = \frac{15}{x}$$

$$\frac{5 \cdot x}{12} = \frac{15 \cdot 12}{x}$$

$$\frac{5x}{12} = 15$$

$$\frac{5x \cdot 12}{12} = 15 \cdot 12$$

$$5x = 15 \cdot 12$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{15 \cdot 12}{5}$$

$$x = 36$$

Konens höjd är 36 cm

Eftersom att de var likformiga kunde jag räkna ut hur stor sidan x var genom en enkel ekvation. Då fick jag fram att sidan x var 36 cm, och med den uppgiften kunde jag lösa resten.

$$\frac{36 \cdot \pi \cdot 15^2}{3} = 8478$$

Hela konens volym räknade jag ut såhär.

Konens volym är 8478 cm³

$$36 - 12 = 24$$

$$\frac{24 \cdot \pi \cdot 10^2}{3} = 2513$$

Toppens volym är 2513 cm³

$$8478 - 2513 = 5969$$

$$5969 \text{ cm}^3 =$$

$$5969 \text{ ml} =$$

$$5,969 \text{ l} \approx$$

$$6 \text{ l}$$

Svar: Skålen rymmer 6 liter

Sedan räknade jag ut hur stor toppens volym var. Då var det bara att subtrahera de två resultaten och så hade jag skålens volym!

Uppgift 3:

Ett timglas består av två kongruenta koner med de genomborrade spetsarna mot varandra. Då all sand är i den undre konen är lagrets höjd hälften av konens. Då glaset vänds om rinner sanden med konstant hastighet på precis en timme ned i den andra konen. Hur lång tid har förflutit då sanden i den undre nått upp till en fjärdedel av höjden? Sandytorna tänks plana och parallella med bottenytorna.



$h =$ höjden
 $r =$ radien



Konens volym
 $\frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$

60 min = halva $h = \frac{1}{2} h$

? min = $\frac{1}{4} h$

Det här är vad vi vet och vad jag ser. En stor kon som lämnar plats åt den fjärdedelen sand vars tid vi är ute efter och en mindre kon som markerar hur mycket ledig yta vi har efter att all sanden runnit ner, vilket tar en timme.

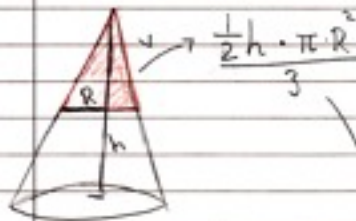
= A
 = P

Vi kallar konerna K, A och P. K är hela halva timglas, A är den lilla och P den stora.

$$\frac{K - P \cdot 60}{K - A} = 60$$

Vi kan då uttrycka en formel för svaret på uppgiften! Enkelt uttryckt kan man säga "Den biten, av den biten multiplicerat med 60". Får vi fram hur stora konerna är kan vi alltså lösa uppgiften. Vi har dock inga siffror, förutom de 60 minuterna det tar för sanden att rinna ner, så vi får jobba med formler istället.

Vi börjar med A



$$\frac{r}{h} = \frac{R}{\frac{1}{2}h}$$

$$\frac{r \cdot \frac{1}{2}h}{h} = \frac{R \cdot \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

$$\frac{\frac{1}{2}h}{h} = R$$

$$\frac{\frac{1}{2}h}{h} = R$$

$$\frac{1}{2} = R$$

$$A = \frac{1}{2}h \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Jag valde att börja med A. Den vet vi är en halv h hög, och genom att ställa upp det som förhållande kan man genom en enkel ekvation få fram ett lite tydligare värde för R.

Sedan P



$$\frac{\frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot r^2}{3}$$

Sedan är det bara att göra samma sak med P.

$$\frac{r}{h} = \frac{9}{\frac{3}{4}h}$$

$$\frac{r \cdot \frac{3}{4}h}{h} = \frac{9}{\frac{3}{4}h} \cdot \frac{3}{4}h$$

$$\frac{\frac{3}{4}rh}{h} = 9$$

$$\frac{\frac{3}{4}rh}{h} = 9$$

$$\frac{3r}{4} = 9$$

$$9 = \frac{\frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2}{3}$$

Då kommande uträkningar är jobbiga att hantera med division, valde jag att byta ut den dividerande trean mot en tredjedel, vilket inte gör någon som helst skillnad.

$$\frac{\frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2$$

Nu vet vi vad P och A har för formler för sin area, så sätter in dem i ekvationen.

$$\frac{K-P}{K-A} \cdot 60 =$$

$$\frac{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2}{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \pi \cdot (\frac{1r}{2})^2} \cdot 60$$

Det som händer sedan är ganska svårt, tycker jag. Men det vi gör är att vi faktoreriserar ut de lika tecknen, och skapar på så sätt ett annat utseende på uttrycket så att vi sedan kan förkorta det.

$$\frac{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2}{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \pi \cdot (\frac{1r}{2})^2} = \frac{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h \cdot \pi \cdot (\frac{3r}{4})^2}{\frac{1}{3}r^2 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \pi \cdot (\frac{1r}{2})^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}r^2 \pi h (1 - \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4})}{\frac{1}{3}r^2 \pi h (1 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2})} = \frac{\frac{1}{3}r^2 \pi h (1 - \frac{27}{16})}{\frac{1}{3}r^2 \pi h (1 - \frac{1}{4})} =$$

$$\frac{1 - \frac{27}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{27}{16}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Och när vi multiplicerat ihop bråken, har vi ett ännu enklare uttryck, nu med bråk. Snart är vi framme!

$$\frac{1 - \frac{27}{16}}{1 - \frac{1}{4}} \cdot 60$$

$$1 - \frac{27}{64} = \frac{64 - 27}{64} = \frac{37}{64}$$
$$1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Förenkling

$$\frac{\frac{37}{64}}{\frac{7}{8}} = \frac{37}{64} \cdot \frac{8}{7} = \frac{296}{448}$$

$$\frac{296}{448} = 0,6607142857$$

$$0,6607142857 \cdot 60 = 39,642857142$$

$$39,642857142 \approx 39,6 \approx 40$$

Sedan dividerar vi vårt kära bråktalet, multiplicerar det med 60, och voila! Vi har ett svar!

Svar: Det tar 40 minuter för sanden att nå upp till en fjärdedel av höjden